משוואות דיפרנציאליות רגילות ח' (104131) - בחינת סיום - אביב תשס"ד

פרטי הסטודנט:

שם משפחה ..... שם פרטי .....

מספר זהות ..... פקולטה .....

הוראות: משך הבחינה שלוש שעות והיא מורכבת מתשע שאלות אמריקאיות. לכל שאלה בחר תשובה **אחת בלבד** וסמן אותה בעיגול. אין להשתמש בדפי עזר, במחשבונים או בטלפונים. בסיום מסור רק את שאלון הבחינה, ללא מחברת הטיוטה. הערה: התשובות הנכונות מסומנות ב- **( ).**

שאלה 1. בתחום $x>0$ יש למשוואה $4x^3y'''+12x^2y''+xy'-y=\frac{A}{\sqrt{x}}+B\sqrt{x}\cdot\ln x$ בהכרח פתרון

פרטי מהצורה: א. $y(x)=\frac{a}{\sqrt{x}}+b\sqrt{x}\cdot\ln x+c\sqrt{x}$ **(ב.)** $y(x)=\frac{a\ln^2 x}{\sqrt{x}}+b\sqrt{x}\cdot\ln x+c\sqrt{x}$

ג. $y(x)=\frac{a}{\sqrt{x}}+b\sqrt{x}\cdot\ln x$ ד. $y(x)=\frac{a\ln x}{\sqrt{x}}+b\sqrt{x}\cdot\ln x$ ה. $y(x)=\frac{a\ln^2 x}{\sqrt{x}}+b\sqrt{x}\cdot\ln x$

שאלה 2. יהי $y(x)$ פתרון של המשוואה $(1-x^3)y''+30xy=0$ המקיים $y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$.
אז $y(1)$ שווה ל- א. 13.5 ב. -4.25 ג. -3 **(ד.)** 0 ה. 9.75

שאלה 3. נתונה המשוואה $y''+y=\frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, ויהי $y(x)$ פתרון שלה המקיים את התנאי $y(0)=y'(0)=0$. אז $y(\frac{\pi}{3})$ שווה ל-

(א.) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{\ln 2}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}+\frac{2\ln 5}{3}$ ג. $-\frac{17}{29}$ ד. $\frac{2}{3}+\frac{\ln 3}{6}$ ה. $-\frac{2\pi}{5}-\frac{2}{3}$.

שאלה 4. הפונקציה $y_1(x)=e^{-x}$ היא אחד הפתרונות של המשוואה $x\,y''+(2x-1)\,y'+q(x)\,y=0$

בתחום $x>0$, באשר $q(x)$ רציפה שם. יהי $y(x)$ פתרון של המשוואה המקיים $y'(1)=\frac{3}{e}$, $y(1)=\frac{1}{e}$.

אז $y(2)$ שווה ל- א. $-\frac{11}{e^2}$ ב. $-\frac{1}{e^2}$ ג. $\frac{3e+1}{e^2}$ ד. $\frac{\sqrt{e}-3}{e^2}$ **(ה.)** $\frac{7}{e^2}$

שאלה 5. יהי $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ פתרון של המערכת $\begin{cases} x'(t)=x+4y+5 \\ y'(t)=2x+3y+5 \end{cases}$ המקיים $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

אז $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix}$ שווה ל- **(א.)** $\begin{pmatrix} e^5-1 \\ e^5-1 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} e^2+1 \\ e^2+1 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 2e^{-1}-1 \\ -e^{-1}-1 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} e^5+2e^{-1} \\ e^5-e^{-1} \end{pmatrix}$ ה. $\begin{pmatrix} 2e^2-1 \\ -e^2-1 \end{pmatrix}$

שאלה 6. נתונה המשוואה $3x\,y''+2y'+x\,y=0$ בתחום $x>0$, ונתונים שני פתרונות שלה בצורה

$y_2(x)=x^{\mu}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$, $y_1(x)=x^{\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, עם $\lambda>\mu$, ועם $b_0=1$, $a_0=1$.

אז ההפרש (a_2-b_2) שווה ל- א. $\frac{7}{15}$ ב. $\frac{4}{21}$ ג. $-\frac{3}{19}$ **(ד.)** $\frac{1}{35}$ ה. $-\frac{13}{28}$

שאלה 7. יהי $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ פתרון של המערכת $\begin{cases} x'(t)=4x+y \\ y'(t)=-x+6y \end{cases}$, אשר מקיים $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

אז $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix}$ שווה ל- א. $\begin{pmatrix} 2e^5 \\ -e^5 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} -e^5 \\ 3e^5 \end{pmatrix}$ **(ג.)** $\begin{pmatrix} e^5 \\ 2e^5 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 4e^5 \\ -e^5 \end{pmatrix}$ ה. $\begin{pmatrix} 3e^5 \\ 2e^5 \end{pmatrix}$

שאלה 8. נתונה המשוואה $y'=y(y-\cot x)-\frac{1}{\sin^2 x}$ בתחום $0<x<\pi$, ויהי $y(x)$ פתרון שלה המקיים $y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$. אז $y(\frac{\pi}{3})$ שווה ל- א. 0 ב. $\frac{3\sqrt{3}}{20}$ ג. $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ד. $-\frac{5\sqrt{3}}{21}$ **(ה.)** $\frac{8\sqrt{3}}{15}$

שאלה 9. יהי $y(x)$ פתרון של המשוואה $y'(x)=(y-\sqrt{2x^2+1})^2(y-\sqrt{2x^2+5})^2+\frac{2x}{y}$ בתחום

$x\ge 0$, אשר מקיים את התנאי $y(0)=2$. אז הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$ שווה ל-:

א. $\sqrt{5}$ ב. 0 **(ג.)** $\sqrt{2}$ ד. ∞ ה. 1

- סוף -